Μάθημα 25ο

30/05/18

Θεώρημα Επέκτασης του Rieman

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $A \subset D$ διακριτό και κλειστό (*) και $f: D \setminus A \longrightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη

Τότε είναι ισοδύναμα:

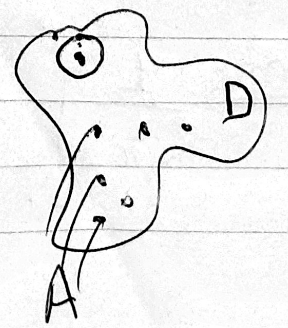
(α) η f είναι ολόμορφα επεκτάσιμη στο D (πάνω από το A). δηλ $\exists\, F: D \longrightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη και $F|_{D\setminus A} = f$.

(β) η f είναι συνεχώς επεκτάσιμη στο D, δηλ. ...

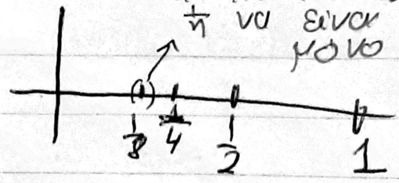
(γ) $\forall\, c \in A$ $\exists$ περιοχή του c στην οποία η f είναι φραγμένη

(δ) $\forall\, c \in A$ $\lim\limits_{z \to c} (z-c) f(z) = 0$

(*) $A \subset \mathbb{C}$ διακριτό: $\Leftrightarrow$ κάθε $c \in A$ είναι μεμονωμένο



μπορώ να βρω περιοχή που το $\frac{1}{n}$ να είναι μόνο του



<u>Π.χ.</u> το $N := \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \subset \mathbb{R}$ είναι διακριτό αλλά όχι κλειστό

(αφού δεν ισχύει: $\forall (z_n) \subseteq N$ με $z_n \to \alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \alpha \in N$)

και το $N \cup \{0\}$ δεν είναι διακριτό, αφού το 0 δεν είναι μεμονωμένο.

[<u>Π.χ.</u> Κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι διακριτό και κλειστό

Ειδικότερα το $A = \{c\}$ είναι διακριτό και κλειστό]

<u>Απόδειξη</u>

$(\alpha) \Rightarrow (\beta) \Rightarrow (\gamma) \Rightarrow (\delta)$: τετριμμένη

<u>$(\delta) \Rightarrow (\alpha)$</u>

Αφού κάθε $c \in A$ είναι μεμονωμένο, μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε ένα ξεχωριστά χ.β.τ.γ. θεωρούμε ότι $A = \{c\}$ και για λόγους απλούστευσης ότι $c = 0$

Με αυτές τις απλουστεύσεις: Θ.δ.ο: $D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $0 \in D$, $f : D \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και

$\lim_{z \to 0} z f(z) = 0$ <u>τότε</u> $\exists \ F : D \to \mathbb{C}$ με

$F|_{D \setminus \{0\}} = f$ και F ολόμορφη

<u>Απόδ.</u>

θεωρούμε $g(z) = z f(z)$, $z \in D \setminus \{0\}$

$g(0) = 0$ $\left(\Rightarrow g : D \to \mathbb{C} \text{ είναι συνεχής με } \lim_{z \to 0} g(z) = 0 = g(0) \right)$

και $h(z) = z g(z)$, $z \in D$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow h : D \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη

(στο $D \setminus \{0\}$: $h(z) = z^2 f(z)$ άρα $h|_{D \setminus \{0\}}$ ολόμορφη

στο $\{0\}$ έχουμε : $h(z) = h(0) + z g(z)$, $z \in D \setminus \{0\}$

$$\lim_{z\to 0} g(z) = 0 = g(0)$$

$\Leftrightarrow \dfrac{h(z)-h(0)}{z-0} = g(z)$. Συνεπώς η h είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο 0 με $h'(0) = g(0) = 0$. <u>Άρα</u> η $h: D \to \mathbb{C}$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor γύρω από το μηδέν και:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} z^n \Rightarrow h(z) = \underbrace{h(0)}_{=0} + \underbrace{h'(0)}_{=0} z + \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{h^{(n)}(0)}{n!}}_{=a_n} z^n =$$

$$= z^2 \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^n}_{=: F(z)}, \quad z \in D(0,r), \ r>0$$

Αφού $h(z) = z^2 f(z) \ \forall z \in D\setminus\{0\}$ και

$h(z) = z^2 F(z) \ \forall z \in D(0,r) \Rightarrow F(z) = f(z) \ \forall z \in D\setminus\{0\}$ και αφού $F(z)$ είναι δυναμοσειρά στο $D(0,r)$, $r>0$ θα είναι ολόμορφη εκεί $\boxtimes$

<u>Θεώρημα Μοναδικότητας – Αρχή Ταυτότητας</u>:

<u>Έστω</u> $D \subset \mathbb{C}$ <u>τόπος</u> και $f, g: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφες. Τότε είναι ισοδύναμα τα εξής:

(α) $f = g$

(β) το σύνολο $\{w \in D : f(w) = g(w)\}$ έχει σ.σ. στο D

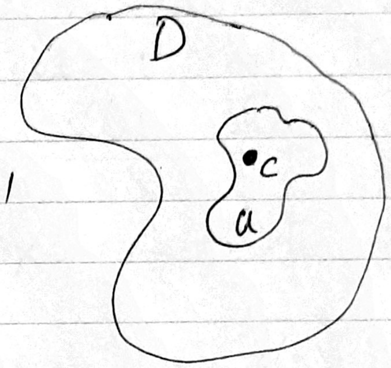
γ) $\exists$ σημείο $a \in D$: $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a) \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

<u>Απόδειξη</u> = <u>Άσκηση</u>

$\boxed{\text{ΠΟΡΙΣΜΑ}}$ Έστω $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ και $(a,b) \subset D$ τόπος
$\Rightarrow \exists$ <u>το πολύ</u> μια και μοναδική ολόμορφη
επέκταση στο D

<u>Μεμονωμένες Ανωμαλίες</u>

<u>Ορισμός</u>: Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό. Ένα σημείο $c \in D$ ονομάζεται <u>μεμονωμένη ανωμαλία</u> της f, αν η $f: D\setminus\{c\} \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη



Μια μεμονωμένη ανωμαλία, ονομάζεται <u>επουσιώδης</u> (απαλοίψιμη) αν η f είναι ολόμορφα επεκτάσιμη στο D

<u>Παρατήρηση</u>

Από Θεωρ. Επέκτασης Riemann προκύπτει, ότι — μεταξύ άλλων — το c είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f αν η f είναι φραγμένη στο $U\setminus\{c\}$ όπου $U \subset D$ μια περιοχή του c

<u>Π.χ.</u> (α) Η $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z-1} = z+1$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο 1.

(β) Η $g(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο 0

Ας δω την
$$\frac{1}{g(z)} = \frac{e^z-1}{z} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$$ είναι ολόμορφη ως δυναμοσειρά $:= h(z)$ με $h(0) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, U$ περιοχή γύρω από το 0 $\equiv h(z)$
με $h(z) \neq 0 \quad \forall z \in U \Rightarrow g(z) = \dfrac{1}{h(z)}$ είναι ολομ. στο U

<u>Ορισμός</u>: Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $c \in D$, $f: D \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$
Το c ονομάζεται <u>πόλος της</u> ολόμορφης
<u>f</u> αν υπάρχει $m := \min\{n \in \mathbb{N}$: η $(z-c)^n f(z)$

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$

είναι $\underbrace{\text{φραγμένη γύρω από το}}$ $c\}$

$\exists$ περιοχή $U \subset D$ του c
με $f|_{U \setminus \{c\}}$ φραγμένη

το οποίο ονομάζεται <u>τάξη του πόλου c της f</u>
και αν $m = 1$, θα λέμε ότι η f έχει
<u>απλό πόλο</u> στο c

<u>π.χ.</u> $f(z) = \frac{1}{z}$ έχει απλό πόλο στο 0

η $f(z) = \frac{1}{z^2}$ έχει πόλο τάξης 2 στο 0

η $f(z) = \frac{1}{(z-c)^m}$ έχει πόλο τάξης $m \in \mathbb{N}$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό. Μία μιγαδική
συνάρτηση f ονομάζεται (α) <u>μερόμορφη στο D</u>
αν υπάρχει διακριτό υποσύνολο $P(f)$ (το οποίο μπορεί
να είναι και το κενό) $\subset D$ έτσι ώστε η

$f: D \setminus P(f) \longrightarrow \mathbb{C}$ να είναι ολόμορφη και κάθε

$c \in P(f)$ να είναι πόλος της f

(β) <u>μερόμορφη στο c</u>, $c \in D$, αν $\exists$ ανοικτή περιοχή
του c, έτσι ώστε η f να είναι μερόμορφη
σε αυτήν

<u>Παράδειγμα</u> : • Ρητές συναρτήσεις είναι μερόμορφες

<u>Παρατήρηση</u> : Ο χώρος των μερόμορφων συναρτήσεων επιτρέπει και τη διαίρεση δύο τέτοιων (με αποτέλεσμα της πράξης στο ίδιο σύνολο συναρτήσεων)

<u>Ορισμός</u> : Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $c \in D$, $f: D \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Το c ονομάζεται <u>ουσιώδης ανωμαλία</u> αν δεν είναι ούτε επουσιώδης, ούτε πόλος.

<u>Ασκηση</u> : (1) Σκεφτείτε, τι σημαίνει αυτό, π.χ. ως προς το φραγμένο σύμφωνα με τους προηγούμενους ορισμούς.

(2) Εξετάστε τις μεμονωμένες ανωμαλίες (και αν πόλο ποιας τάξης)

$$\frac{z^4}{(z^4+16)^2}, \quad \frac{1-\cos z}{\sin z}, \quad \frac{z}{e^z - z + 1}, \quad \frac{z^2-\pi^2}{\sin^2 z},$$

$$\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z-2\pi i}, \quad \cos\left(\frac{1}{z}\right)$$